Ministère de la Justice

Direction de l'administration pénitentiaire

Concours pour le recrutement de directeurs des services pénitentiaires

Session 2013

Jeudi 7 mars 2013

Concours externe et interne

3$^{\text{ème}}$ épreuve d'admissibilité

Composition ou étude de cas dans l'une des matières suivantes au choix du candidat lors de l'inscription : **STATISTIQUES ET MATHEMATIQUES**

(durée : 4 heures – coefficient : 4)

*****

Aucun document ou outil électronique ou calculatrice n'est autorisé

Cette composition comporte cinq exercices indépendants entre eux que les candidats peuvent résoudre dans l'ordre qu'ils souhaitent. Un soin particulier devra être porté à la rédaction et à la citation des théorèmes employés.

1 Algèbre linéaire : calcul de la somme d'une série de matrices

Soit $M_3(\mathbf{R})$ l'ensemble des endomorphismes à valeurs réelles de dimension 3.

Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A en indiquant la matrice diagonale et les matrices de changement de base.
2. En utilisant les espaces propres, en déduire que A peut s'écrire comme la somme de deux projecteurs orthogonaux $L \in M_3(\mathbf{R})$ et $N \in M_3(\mathbf{R})$ (dont les valeurs ne sont pas à déterminer à ce stade) telle que :

   $$A = \lambda L + \mu N$$

   λ et μ sont à évaluer en fonction des valeurs propres de A.

   On rappelle que si L et N sont deux projecteurs orthogonaux, on a :

   $$L^2 = N$$
   $$N^2 = N$$
   $$LN = NL = \mathbf{0}$$

   avec $\mathbf{0} \in M_3(\mathbf{R})$ qui est la matrice nulle.
3. Calculer A^n en fonction de L et de N.
4. En supposant acquis le problème d'existence, calculer la somme suivante en fonction de L et N :$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$
5. Proposer une expression simple de L et de N en fonction de A et de la fonction identité notée I_3

2 Analyse : formule de Stirling et intégrales de Wallis

On donne W_n l'intégrale de Wallis suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx \tag{1}$$

où $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

1. Calculer W_0, W_1, et le produit $W_0 W_1$.
2. Déterminer une relation entre W_n et W_{n-2}. Montrer que W_{2n} s'exprime facilement en fonction d'une constante.
3. En déduire que le produit nW_nW_{n-1} est égal à une constante qu'on déterminera.
4. En déduire un équivalent de W_n lorsque $n \to +\infty$.
5. Soit (u_n) une suite de terme général : $u_n = n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^n$. En utilisant la suite (v_n) définie par :$v_n = \ln u_n$ (ln étant le logarithme néperien), montrer que v_n puis u_n convergent vers des valeurs constantes qu'on ne determinera pas. En déduire, en fonction de la limite notée λ de u_n lorsque $n \to \infty$ un équivalant de $n!$.
6. Avec deux valeurs des intégrales de Wallis W_{2n} obtenues plus haut, en déduire un équivalant de $n!$. Cette égalité est appelée formule de Stirling.

3 Analyse : fonction définie par une intégrale

Soit la fonction$f$ définie par : :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \tag{2}$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\, dt \tag{3}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathbf{C}^1$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En déduire la valeur de $f(x)$.

4 Equations différentielles

Trouver toutes les applications f dérivables deux fois définies par :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \tag{4}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt \tag{5}$$

5 Statistiques : loi conditionnelle

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de densité :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}, \forall x \in \mathbf{R}_+^*$$

Soit Y une autre variable aléatoire. On suppose que la loi conditionnelle de Y sachant X est une loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma = \frac{1}{2X}$.

1. Calculer la loi du couple (X, Y). (On pourra utiliser les densités conditionnelles).
2. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant Y ?
3. En déduire l'espérance conditionnelle de X sachant Y que l'on note : $E[X/Y]$.